

# 基于投影近似子空间跟踪技术的自聚焦算法

蒋 锐<sup>1</sup>,朱岱寅<sup>1</sup>,沈明威<sup>2</sup>,朱兆达<sup>1</sup>

(1.南京航空航天大学信息科学工程学院,江苏南京 210016; 2.南京云海大学计算机与信息学院,江苏南京 211100)

**摘要:** 基于特征向量法的自聚焦算法具有比相位梯度自聚焦(Phase Gradient Autofocus,简称 PGA)算法更好的算法性能,但该算法必须对协方差矩阵进行特征分解,所以运算量大.利用投影近似子空间跟踪(Projection Approximation Subspace Tracking,简称 PAST)技术的自聚焦算法可以解决上述问题.通过实际数据处理结果对比,证明基于 PAST 技术的自聚焦算法是一种可满足实时处理要求的有效自聚焦方法.

**关键词:** 相位梯度自聚焦(PGA);特征向量法;特征分解;投影近似子空间跟踪(PAST)

**中图分类号:** TN957.51      **文献标识码:** A      **文章编号:** 0372-2112(2012)06-1251-06

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>

**DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2012.06.031

## An Autofocus Algorithm for Spotlight SAR Imagery Using the Projection Approximation Subspace Tracking Approach

JIANG Rui<sup>1</sup>, ZHU Dai-yin<sup>1</sup>, SHEN Ming-wei<sup>2</sup>, ZHU Zhao-da<sup>1</sup>

(1. College of Electronics and Information Engineering, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing, Jiangsu 210016, China;

2. College of Computer & Information, Hohai University, Nanjing, Jiangsu 211100, China)

**Abstract:** The eigenvector method for maximum-likelihood estimation of phase error has better algorithmic performance than phase gradient autofocus (PGA). However, this method requires eigendecomposition of the sample covariance matrix, which is a computationally expensive task and also limits the real-time application. In order to overcome such difficulty, an autofocus algorithm using the projection approximation subspace tracking (PAST) approach is proposed. With this method, the procedures of covariance matrix estimation and eigendecomposition can be avoided and the computational cost can be reduced to the level of that of PGA. Monte Carlo tests and real SAR data validate that the new approach outperforms PGA.

**Key words:** phase gradient autofocus (PGA); eigenvector method; eigendecomposition; projection approximation subspace tracking (PAST)

## 1 引言

合成孔径雷达(Synthetic Aperture Radar,简称 SAR)具有在全天时,全天候条件下高分辨率成像的能力.由于 SAR 是相干成像系统,SAR 图像和接收信号相位之间存在紧密的联系.飞机在实际飞行过程中的微小运动偏差就会引起较大的接收信号相位误差,从而导致图像聚焦质量的明显下降.即使装备先进的电子导航系统,对 SAR 系统的运动偏差进行较精确的测量,并在接收信号中加以补偿,也很难获得非常理想的 SAR 图像<sup>[1]</sup>.因此,为了获得高质量的 SAR 图像,必须利用自聚焦算法对 SAR 图像作进一步处理,估计其相位误差并进行补偿<sup>[2~11]</sup>.现有自聚焦算法包括子孔径处理(Map Drift,简称 MD)算法,该算法实现简单,且鲁棒性较好,但是

只能估计低阶相位误差;秩一相位估计(Rank One Phase Estimation,简称 ROPE)算法虽然可以估计任意阶相位误差,但其信号模型假设基于一个距离单元仅有一个强散射点,如果实际 SAR 图像不符合该模型所假设情况,则自聚焦效果不理想;基于加权最小二乘(Weighted Least-Squares,简称 WLS)的自聚焦算法,对 SAR 图像中各距离单元的杂波分布没有任何假设,适用于各种场景类型的 SAR 图像,但该算法必须先提取各像素单元的相位信息,并逐个进行相位展开,巨大的运算量无法满足算法实时处理要求;相位梯度自聚焦(Phase Gradient Autofocus,简称 PGA)算法,因为运算量适中和鲁棒性好,被广泛应用于 SAR 图像自聚焦中.

文献[12]提出的基于特征向量法的自聚焦算法,同时利用多个脉冲估计相位误差函数,比较于 PGA 算法

中仅利用相邻两个脉冲进行相位估计的方法,具有更高的估计精度,在较少迭代次数的情况下就可以获得理想的自聚焦效果.并且该算法对信噪比(Signal-to-Noise Ratio,简称 SNR)要求较低,甚至在不加窗的情况下也可以保证相位估计的无偏性和估计精度,确保对宽带随机相位误差的正确估计.但由于该算法必须对协方差矩阵进行特征分解,且特征值分解的运算量大、工程实现困难,严重影响算法的实时处理能力,所以在实际中并不被广泛应用.

本文针对基于特征分解方法的自聚焦算法运算量大的问题,提出了一种可满足算法实时处理要求的基于投影近似子空间跟踪(Projection Approximation Subspace Tracking,简称 PAST)技术<sup>[15~20]</sup>的自聚焦算法.该算法利用 PAST 技术,避免了原自聚焦算法中对协方差矩阵进行估计以及特征分解的过程.通过对基于特征向量法的自聚焦算法,PGA 算法和本文算法的算法性能分析和实际数据处理结果对比,证明本文算法相比较基于特征向量法的自聚焦算法,计算复杂度有大幅度降低,与 PGA 算法相当,而其自聚焦性能虽然不及基于特征向量法的自聚焦算法,却明显优于 PGA 算法.

## 2 基于投影近似子空间跟踪技术的自聚焦算法

PAST 利用递归最小二乘方法,对信号子空间进行估计,避免了估计协方差矩阵以及特征分解的过程<sup>[19]</sup>.针对原基于特征分解方法的自聚焦算法实时处理能力差的问题,本文采用 PAST 技术有效降低算法计算复杂度,使其运算量与 PGA 算法相当,可以满足算法实时处理要求,且自聚焦性能依然优于 PGA 算法.

### 2.1 算法介绍

不同于特征分解一次性计算出所有特征值和特征向量的运算过程,由于在该自聚焦算法中仅需要获得最大特征值对应的特征向量,所以本文算法利用各距离单元信号,通过以下的公式计算迭代,只估计自聚焦算法所需的特征向量:

$$\text{for } i = 1, 2, \dots, N \text{ do} \quad (1)$$

$$w(i) = \mathbf{u}_{i-1}^H \mathbf{x}_i \quad (2)$$

$$\lambda(i) = \lambda(i-1) + |w(i)|^2 \quad (3)$$

$$\Delta_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{u}_{i-1} w(i) \quad (4)$$

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_{i-1} + \frac{\Delta_i w^*(i)}{\lambda(i)} \quad (5)$$

其中, \* 代表取共轭;  $N$  为参与相位估计的距离单元数;  $\mathbf{x}_i$  为各距离单元信号为:

$$\mathbf{x}_i = [X_i(1), X_i(2), \dots, X_i(M)]^T \quad (6)$$

其中,  $M$  为参与相位估计的脉冲数.当前  $i$  个距离单元

信号代入 PAST 中进行计算时,  $w(i)$  和  $\Delta_i$  为 PAST 计算中所需的中间变量;  $\lambda(i)$  和  $\mathbf{u}_i$  分别为当前估计得到的最大特征值和其对应的特征向量.  $\lambda(i)$  和  $\mathbf{u}_i$  的初始值为:

$$\lambda(0) = 0 \quad (7)$$

$$\mathbf{u}_0 = [1, 1, 1, \dots, 1]^T \quad (8)$$

由于在自聚焦算法选择参与相位估计的距离单元时,已经对各距离单元按能量大小进行排序,所以本文算法选择按能量由小到大顺序将距离单元信号代入式(1)~(5)中,对主特征向量进行估计.将式(1)~(5)进一步简化,得到:

$$\mathbf{u}_i = \frac{\sum_{k=1}^i w^*(k) \mathbf{x}_k + \lambda(0) \mathbf{u}_0}{\sum_{k=1}^i |w(k)|^2 + \lambda(0)} \quad (9)$$

式(9)说明,基于 PAST 技术的自聚焦算法的实质是对各距离单元信号和初始信号  $\mathbf{u}_0$ , 进行加权平均,以估计相位误差函数.将式(7)代入式(9)中:

$$\mathbf{u}_i = \frac{\sum_{k=1}^i w^*(k) \mathbf{x}_k}{\sum_{k=1}^i |w(k)|^2} \quad (10)$$

此时,基于 PAST 技术的自聚焦算法就演变为通过对各距离单元信号的加权平均,估计相位误差函数.

### 2.2 算法性能分析

相位估计方差值的克拉默—劳界限(Cramer-Rao Lower Bound,简称 CRLB)为<sup>[12,13]</sup>:

$$\sigma^2 = \frac{1}{MN\beta^2} + \frac{1}{N\beta} \quad (11)$$

其中,  $M$  为式(6)中参与相位估计的脉冲数;  $N$  为式(1)~(5)中参与相位估计的距离单元数;  $\beta$  为窗内图像在方位数据域的信噪比.式(11)说明,参与相位估计的脉冲数越多,相对应的 CRLB 越小,则该算法在达到 CRLB 时的算法性能就越好.由于基于特征分解方法的自聚焦算法和 PGA 算法在高信噪比条件下均可以达到式(11)所示 CRLB<sup>[12]</sup>,并且 PGA 算法仅利用相邻两个脉冲估计相位误差函数,而基于特征分解方法的自聚焦算法则利用多个脉冲估计相位误差函数,即该算法参与相位估计的脉冲数多于 PGA 算法所利用脉冲数,所以其自聚焦性能优于 PGA 算法.

图 1 中利用蒙特卡罗仿真实验对 PGA 算法,基于特征分解方法的自聚焦算法和本文算法的相位误差估计性能进行比较.设定三种算法中参与相位估计的距离单元数为  $N = 512$ ,基于特征分解方法的自聚焦算法和本文算法中参与相位估计的脉冲数为  $M = 64$ ,待估计相位  $\mathbf{v}$  为一个纯相位向量.为了方便对于仿真结果

的分析,仅在任意某一脉冲位置处设定非零相位值.本文蒙特卡罗仿真实验中,选取  $M/2$  脉冲位置处的待估计相位值为  $\pi/2$ ,即:

$$\mathbf{v} = [\exp[j \cdot \gamma(1)], \exp[j \cdot \gamma(2)], \dots, \exp[j \cdot \gamma(M)]]^T \quad (12)$$

$$\gamma(m) = \begin{cases} \pi/2, & m = M/2 \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad (13)$$

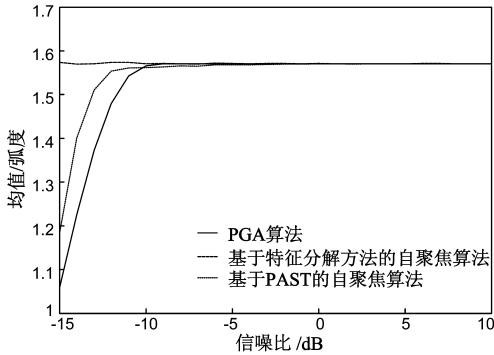
定义协方差矩阵  $\mathbf{C}^{[13]}$ :

$$\mathbf{C} = \sigma_n^2 \mathbf{I} + \sigma_a^2 \mathbf{v} \mathbf{v}^H \quad (14)$$

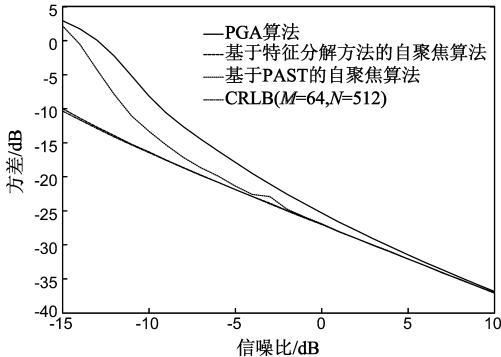
根据式(14)仿真生成协方差矩阵  $\mathbf{C}$ .其中,  $\mathbf{I}$  为单位矩阵;  $\mathbf{v}$  为式(12)~(13)中待估计的相位误差函数;  $\sigma_n^2/2$  和  $\sigma_a^2/2$  分别为噪声和信号的方差值.则图像在方位数据域的 SNR 可表示为:

$$\beta = \frac{\sigma_a^2}{\sigma_n^2} \quad (15)$$

在生成协方差矩阵  $\mathbf{C}$  的过程中,通过设置纯相位向量  $\mathbf{v}$  来确定待估计相位误差值;通过控制  $\sigma_a^2$  与  $\sigma_n^2$  的比值来确定 SNR.然后利用文献[14]中所介绍方法,从已生成协方差矩阵  $\mathbf{C}$  中提取参与蒙特卡罗仿真实验的各距离单元信号样本.



(a) 不同算法估计相位的均值比较



(b) 不同算法估计相位的方差值比较

图1 蒙特卡罗仿真实验

观察发现,三种算法中,基于特征分解方法的自聚焦算法在较低的信噪比条件下依然可以保证对相位误差的无偏估计,且相位估计的方差值可达到 CRLB,是

三种算法中估计相位误差性能最佳的算法;由于低信噪比条件会导致信号子空间和噪声子空间所对应特征值之间的差值变小,在这种情况下,相对于直接特征分解来说,利用 PAST 算法想要精确估计信号子空间就变得困难的多<sup>[15,16]</sup>,所以在低信噪比条件下, PAST 算法相对于直接特征分解而言,估计特征向量的精度降低,从而导致相位误差估计的精度降低,影响自聚焦效果.从仿真结果中也可以看出,本文算法在较低信噪比情况下,其相位估计的方差值无法达到 CRLB,但其算法性能依然优于 PGA 算法,且在较高信噪比条件下,本文算法具备与基于特征分解方法的自聚焦算法相同的算法性能.

### 2.3 算法复杂度分析

文献[15~20]对特征分解方法和 PAST 技术的计算复杂度进行了分析比较.基于特征分解方法的自聚焦算法中,利用  $M$  个脉冲估计相位误差函数,忽略估计样本协方差矩阵  $\mathbf{C}$  所需的计算量,仅考虑特征分解的过程,其算法计算复杂度为  $O(M^3)$ ;基于 PAST 技术的自聚焦算法中,利用式(1)~(5)估计特征向量的过程,其计算复杂度为  $O(MP)$ ,其中  $P$  为所需估计特征向量个数.由于本文算法中只需估计最大特征值对应的特征向量,即  $P=1$ ,所以其算法计算复杂度仅为  $O(M)$ .

为了更进一步比较,利用复数乘法衡量两种算法的运算量.考虑利用  $N$  个距离单元,  $M$  个脉冲估计样本协方差矩阵  $\mathbf{C}$  需要  $NM^2$  次复乘运算;特征分解的过程需要  $3M^3$  次复乘运算.所以基于特征分解方法的自聚焦算法,其运算量为:

$$f_{ED} = NM^2 + 3M^3 \quad (16)$$

基于 PAST 技术的自聚焦算法,利用式(1)~(5)每迭代一次需要  $3M$  次复乘运算,由于一共有  $N$  个距离单元,所以该算法的运算量为:

$$f_{PAST} = 3NM \quad (17)$$

在 PGA 算法中,每一个距离单元求取相位梯度时需要  $M-1$  次复乘运算,由于一共有  $N$  个距离单元,所以该算法的运算量为:

$$f_{PGA} = N(M-1) \quad (18)$$

比较式(16)~(18),考虑在基于特征分解方法的自聚焦算法和本文算法中,均利用多个脉冲估计相位误差函数,即  $M \geq 3$ ,因此有:

$$f_{ED} > f_{PAST} \approx 3f_{PGA} \quad (19)$$

以实际数据为例,选取参与相位估计的距离单元数为  $N=1024$ ,脉冲数为  $M=300$ :

$$\frac{f_{ED}}{f_{PAST}} = \frac{NM^2 + 3M^3}{3NM} \approx 188 \quad (20)$$

可见,本文算法相比较于基于特征分解方法的自聚焦

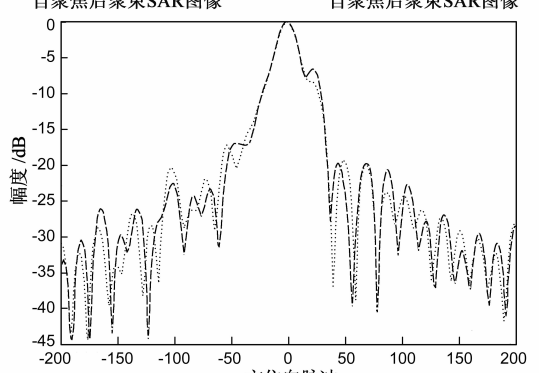
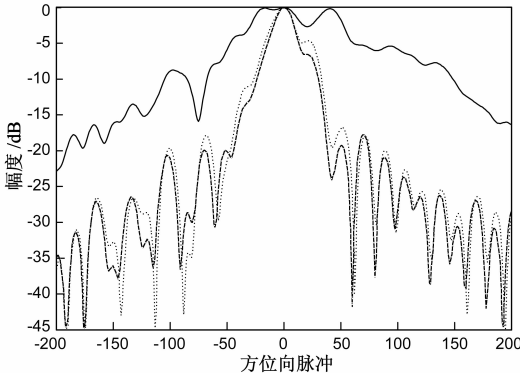
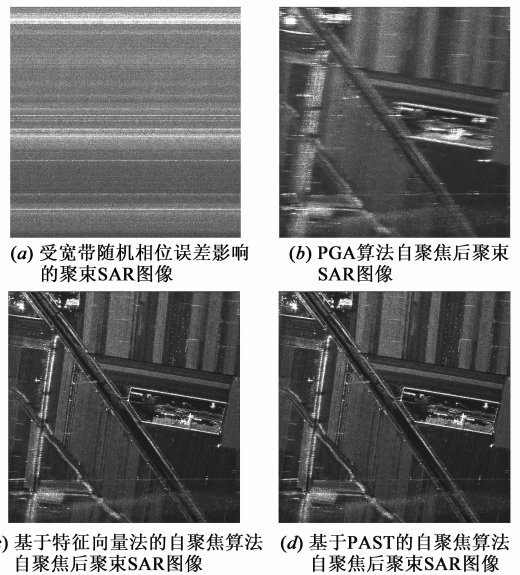
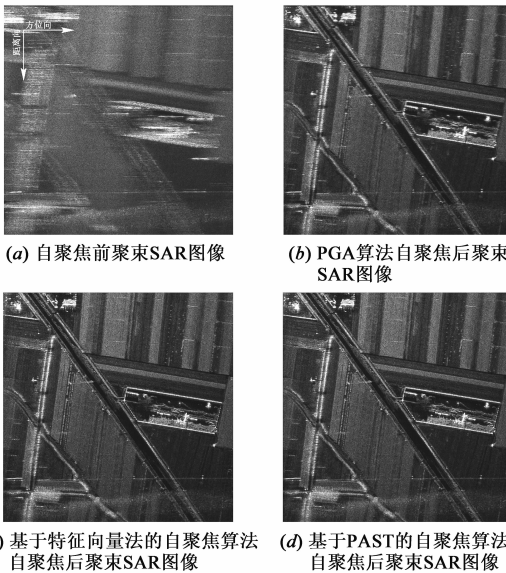
算法,可以有效降低计算复杂度,显著提高算法运算效率.虽然式(19)说明本文算法需要3倍于PGA算法的复数乘法运算量,但该算法直接估计得到相位误差函数,而PGA算法估计得到的是相位误差梯度值,须对该估计值提取相位并进行一次积分;并且本文算法和基于特征分解方法的自聚焦算法一样,仅需要1至2次的较少迭代次数,就可以获得理想的聚焦SAR图像,而PGA算法一般需要3倍于本文算法的迭代次数,即4至6次迭代,才可以获得较好的自聚焦效果.因此,本文算法比较于PGA算法,其算法运算量相当.

### 3 实际数据处理结果

为了验证基于PAST技术的自聚焦算法的有效性,对图2(a)中图像分别利用PGA算法,基于特征分解方法的自聚焦算法和本文算法进行自聚焦处理,结果如图2(b)~(d)所示.对比发现,三种自聚焦算法均可以有效改善该SAR图像的聚焦质量.将图2(a)中的同一

散射强点经过不同自聚焦算法处理后的方位向剖面图在图2(e)中进行比较,可以明显发现PGA算法的自聚焦性能在三种算法中较差,而本文算法性能与原基于特征分解方法的自聚焦算法相同.

为了进一步对比三种自聚焦算法性能,在图2中自聚焦后的理想SAR图像基础上,在方位数据域人为叠加宽带随机相位误差,得到如图3(a)中所示的散焦SAR图像.所叠加宽带随机相位误差函数分布在 $-\pi$ 到 $\pi$ 区间内,服从均值为0的均匀分布.由于图3(a)中目标散焦十分严重,其方位向模糊区域已占满整个方位向宽度,为了完整的保留图像中有效信号信息,选择在不加窗的情况下利用三种算法分别对其进行自聚焦处理,结果如图3(b)~(d)所示.观察图3(b)发现,由于没有进行加窗处理,所以图像在方位数据域的SNR较低,导致PGA算法无法精确估计相位误差函数,自聚焦后图像依然存在明显的方位向散焦;图3(c)和(d)中自聚焦后图像的聚焦质量已经得到明显改善,证明基于



—PGA算法,  $M=2$ , 6次迭代  
 ---基于特征分解方法的自聚焦算法,  $M=300$ , 2次迭代  
 .....基于PAST的自聚焦算法,  $M=300$ , 2次迭代

---基于特征分解方法的自聚焦算法,  $M=300$ , 2次迭代  
 .....基于PAST的自聚焦算法,  $M=300$ , 2次迭代

(e) 散射强点方位向剖面图比较  
 图2 实际数据处理结果

(e) 散射强点方位向剖面图比较  
 图3 估计宽带随机相位误差

特征分解方法的自聚焦算法和本文算法即使在不加窗的低信噪比情况下,依然可以精确的估计相位误差函数,有效实现对 SAR 图像的自聚焦处理.同样将同一散射强点经过不同自聚焦算法处理后的方位向剖面图在图 3(e)中进行比较,发现本文算法具有和基于特征分解方法的自聚焦算法基本相同的自聚焦性能.

图 4(a)中所示待自聚焦 SAR 图像,其图像对比度较低,且没有较强的目标.同样利用三种算法对该 SAR 图像进行自聚焦处理,结果如图 4(b)~(d)所示.图 4(b)中利用 PGA 算法自聚焦后 SAR 图像相比较原图,其方位向聚焦质量改善很小,证明对该幅 SAR 图像,PGA 算法已经不再适用;然而观察图 4(c)和(d)中自聚焦后图像,发现其方位向聚焦质量都有明显改善,特别是区域 1 与区域 2 中的图像,聚焦质量改善显著,证明基于特征分解方法的自聚焦算法和本文算法对低对比度且无较强目标的 SAR 图像依然适用,自聚焦性能均优于 PGA 算法.

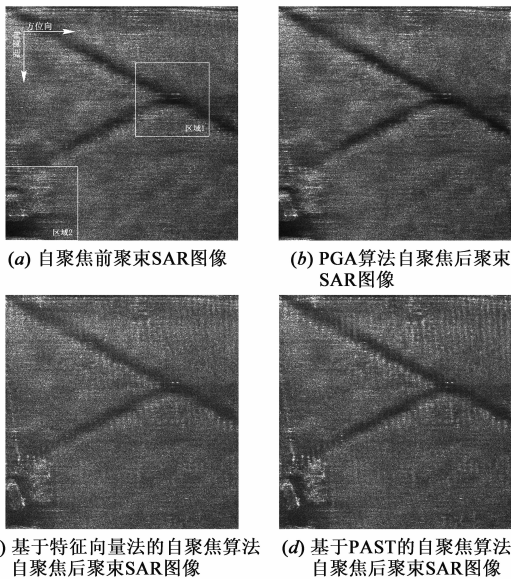


图4 实际数据处理结果

## 4 结论

基于特征分解方法的自聚焦算法虽然可以获得比 PGA 算法更好的自聚焦效果,但是必须对协方差矩阵进行特征分解,且特征分解的运算量大、工程实现困难.因此,该算法并不被广泛应用.本文针对特征分解过程对于算法实时处理的影响,提出了利用 PAST 技术估计所需特征向量,避免了原自聚焦算法中对协方差矩阵进行估计以及特征分解的过程,有效降低了算法计算复杂度.通过对基于特征向量法的自聚焦算法,PGA 算法和本文算法的算法性能分析和实际数据处理结果对比,证明本文算法相比较基于特征向量法的自聚焦算法,运算量有大幅度降低,与 PGA 算法相当,而

其自聚焦性能虽然不及基于特征向量法的自聚焦算法,却明显优于 PGA 算法,是一种可满足实时处理要求的有效自聚焦算法.

## 参考文献

- [1] 保铮,邢孟道,等.雷达成像技术[M].北京:电子工业出版社,2005.
- [2] Calloway T M, Donohoe G W. Subaperture autofocus for synthetic aperture radar[J]. IEEE Trans on Aerospace and Electronic Systems, 1994, 30(2): 617 - 621.
- [3] Piotr S, Krzysztof S K. Coherent mapdrift technique[J]. IEEE Trans on Geoscience and Remote Sensing, 2010, 48(3): 1505 - 1517.
- [4] Snarski C A. Rank one phase error estimation for range-Doppler imaging[J]. IEEE Trans on Aerospace and Electronic Systems, 1996, 32(2): 676 - 688.
- [5] Ye Wei, Yeo T S, et al. Weighted least-squares estimation of phase errors for SAR/ISAR autofocus[J]. IEEE Trans on Geoscience and Remote Sensing, 1999, 37(5): 2487 - 2494.
- [6] Li Lian-lin, Zhang Wen-ji, et al. A novel autofocusing approach for real-time through-wall imaging under unknown wall characteristics[J]. IEEE Trans on Geoscience and Remote Sensing, 2010, 48(1): 423 - 431.
- [7] Cao Pan, Xing Meng-dao, et al. Minimum entropy via subspace for ISAR autofocus[J]. IEEE Trans on Geoscience and Remote Sensing Letters, 2010, 7(1): 205 - 209.
- [8] 邓云凯,王宇,等.基于对比度最优准则的自聚焦优化算法研究[J].电子学报,2006,34(9):1742 - 1744. Deng Yun-kai, Wang Yu, et al. The research of autofocus optimization algorithm based on contrast optimization criterion[J]. Acta Electronica Sinica, 2006, 34(9): 1742 - 1744. (in Chinese)
- [9] Wahl D E, Eichel P H, et al. Phase gradient autofocus-a robust tool for high resolution SAR phase correction[J]. IEEE Trans on Aerospace and Electronics Systems, 1994, 30(3): 827 - 835.
- [10] Rossum W L V, Otten M P G, et al. Extended PGA for range migration algorithms[J]. IEEE Trans on Aerospace and Electronics Systems, 2006, 42(2): 478 - 488.
- [11] Macedo K A C, Scheiber R, et al. An autofocus approach for residual motion errors with application to airborne repeat-pass SAR interferometry[J]. IEEE Trans on Geoscience and Remote Sensing, 2008, 46(10): 3151 - 3162.
- [12] Jakowatz C V, Jr, et al. Eigenvector method for maximum-likelihood estimation of phase errors in synthetic-aperture radar imagery[J]. Journal of the Optical Society of America, 1993, 10(12): 2539 - 2546.
- [13] Jakowatz C V, Jr, et al. Spotlight Mode Synthetic Aperture

Radar[M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1996.

- [14] Robert C P, Casella G. Monte Carlo Statistical Methods[M]. New York: Springer, 2004.
- [15] Yang Bin. Projection approximation subspace tracking[J]. IEEE Trans on Signal Process, 1995, 43(1): 95 – 107.
- [16] Yang Bin. An extended of the PAST algorithm to both rank and subspace tracking[J]. IEEE Signal Process Lett, 1995, 2(9): 179 – 182.
- [17] Abed M K, Chkeif A, et al. Fast orthonormal PAST algorithm[J]. IEEE Signal Process Lett, 2000, 7(3): 60 – 62.
- [18] 李森, 邱天爽. Alpha 稳定分布噪声中的韧性投影近似子空间跟踪算法[J]. 电子学报, 2009, 37(3): 519 – 522.  
Li Sen, Qiu Tian-shuang. A robust PAST algorithm in alpha stable noise environment[J]. Acta Electronica Sinica, 2009, 37(3): 519 – 522. (in Chinese)
- [19] Yang Jian, Xi Hong-sheng, et al. RLS-based adaptive algorithms for generalized eigen-decomposition[J]. IEEE Trans on Signal Process, 2006, 54(4): 1177 – 1188.
- [20] Shen Ming-wei, Zhu Dai-yin, Zhu Zhao-da. Reduced-rank space-time adaptive processing using a modified projection approximation subspace tracking deflation approach[J]. IET Radar, Sonar and Navigation, 2009, 3(1): 93 – 100.

## 作者简介



蒋锐 男, 1985 年 1 月出生于江苏南京. 2007 年本科毕业于南京航空航天大学信息工程专业. 现为南航电子工程系博士研究生, 主要研究方向为雷达信号处理.

E-mail: jr\_ray@yahoo.cn



朱岱寅 男, 1974 年 7 月出生于江苏无锡. 1996 年本科毕业于东南大学无线电工程系, 分别于 1998 年和 2002 年在南京航空航天大学电子工程系获硕士和博士学位. 现为南航电子工程系教授、博士生导师, IEEE 会员, 主要从事雷达成像和信号处理方面的研究.

E-mail: zhudy@nuaa.edu.cn